

Bài 1. (5 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + 8 = 3\sqrt{x^3 + 8}$

b) Cho tam thức bậc hai $P(x)$ có hệ số thực và thỏa mãn:

$$x^2 - 2x + 3 \leq P(x) \leq 15x^2 - 30x + 17, \forall x.$$

Biết rằng $P(13) = 2018$, tính $P(0)$.

Bài 2. (3 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3;0), B(0;4)$. Biết rằng tồn tại đúng một hình vuông có hai đỉnh nằm trên đoạn AB còn hai đỉnh kia nằm trên các đoạn OA, OB . Hãy xác định tọa độ tâm I của hình vuông đó.

Bài 3. (3 điểm)

Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$.

Chứng minh rằng: $x + y + 2z^2 \geq 6$. Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi D, E lần lượt là giao điểm của tia AI với $BC, (O)$. Đường thẳng qua I , vuông góc với AI cắt BC ở K và KA, KE cắt lại (O) ở M, N . Các tia ND, NI cắt lại đường tròn (O) tại Q, P .

a) Chứng minh rằng tam giác INE vuông.

b) Chứng minh rằng $PM = PQ$.

Bài 5. (2 điểm)

Trong một câu lạc bộ có 100 học sinh, gồm 90 học sinh chơi cầu lông, 80 học sinh chơi bóng bàn và 70 học sinh chơi đá bóng. Hỏi có ít nhất bao nhiêu học sinh chơi cả ba môn thể thao?

Bài 6. (3 điểm)

Ở một công ty, có 10 xe đưa rước nhân viên xuất phát từ cùng một bến để đi đến công ty. Mỗi tài xế có hai lựa chọn là:

(1) Đi quốc lộ, không ngại kẹt xe nhưng phải đi vòng, thời gian tốn là 40 phút.

(2) Đi nội thành, đường ngắn hơn và chỉ mất 15 phút nếu một xe chạy, nhưng do đường nhỏ nên nếu có thêm một xe nữa cùng chạy (chỉ xét xe của công ty này) thì thời gian di chuyển của các xe sẽ cùng tăng 5 phút; cứ như thế, thời gian tăng sẽ tỉ lệ thuận với số xe tăng thêm.

Hỏi các tài xế phải thảo luận và chọn ra bao nhiêu xe đi trong nội thành để tổng thời gian các xe di chuyển là ít nhất?

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (5 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + 8 = 3\sqrt{x^3 + 8}$

Điều kiện: $x \geq -2$

(0,25đ)

Đặt $a = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$; $b = \sqrt{x + 2}$

(0,25đ)

Ta có phương trình: $a^2 + 2b^2 = 3ab \Rightarrow a = b \vee a = 2b$

(0,5đ)

$a = b \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = x + 2 \Rightarrow x = 1 \vee x = 2$

(0,5đ)

$a = 2b \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 4(x + 2) \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}$

(0,5đ)

Thử lại, ta có 4 nghiệm: $1; 2; 3 \pm \sqrt{13}$

(0,5đ)

b) Cho tam thức bậc hai $P(x)$ có hệ số thực và thỏa mãn $x^2 - 2x + 3 \leq P(x) \leq 15x^2 - 30x + 17, \forall x$. Biết rằng $P(13) = 2018$, tính $P(0)$.

Theo giả thiết, ta có $(x-1)^2 + 2 \leq P(x) \leq 15(x-1)^2 + 2$ với mọi x .

Thay $x = 1$ thì $2 \leq P(1) \leq 2$ nên $P(1) = 2$.

(0,5đ)

Chú ý rằng $P(x) \geq (x-1)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và ta biết rằng đồ thị

của $P(x)$ là một parabol nên $(x, y) = (1, 2)$ chính là đỉnh của parabol này.

(0,5đ)

Khi đó, $P(x)$ có dạng $P(x) = a(x-1)^2 + 2$ với $a > 0$.

(0,25đ)

Thay $x = 13$, ta có $P(13) = 2018 \Leftrightarrow 144a + 2 = 2018 \Leftrightarrow a = 14$.

(0,5đ)

Thay lại vào đánh giá ban đầu, ta thấy thỏa mãn vì

$(x-1)^2 + 2 \leq 14(x-1)^2 + 2 \leq 15(x-1)^2 + 2, \forall x$.

(0,25đ)

Khi đó $P(x) = 14(x-1)^2 + 2$ nên $P(0) = 14 + 2 = 16$.

(0,5đ)

Bài 2. (3 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3;0), B(0;4)$. Biết rằng tồn tại đúng một hình vuông có hai đỉnh nằm trên đoạn AB còn hai đỉnh kia nằm trên các đoạn OA, OB . Hãy xác định tọa độ tâm I của hình vuông đó.

Gọi OH là đường cao của tam giác OAB . Đặt a là cạnh hình vuông. Theo định lý

Thales thì $\frac{DE}{OH} = \frac{BD}{BO}$ và $\frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OB}$. (0,5đ)

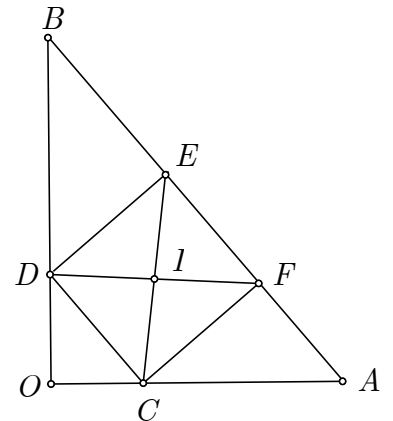
Cộng hai đẳng thức lại, ta có $\frac{a}{OH} + \frac{a}{AB} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{60}{37}$ (0,5đ)

Chú ý rằng $OCID$ nội tiếp và $IC = ID$ nên I thuộc phân giác COD , đặt $I(b, b)$ với $b > 0$. (0,5đ)

Ta tìm được $C\left(\frac{36}{37}; 0\right)$ và $IC = \frac{30\sqrt{2}}{37}$ (0,5đ)

nên $\left(b - \frac{36}{37}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{30\sqrt{2}}{37}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{42}{37}$. (0,5đ)

Vậy tọa độ tâm cần tìm là $I\left(\frac{42}{37}; \frac{42}{37}\right)$. (0,5đ)



Bài 3. (3 điểm)

Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$.

Chứng minh rằng: $x + y + 2z^2 \geq 6$. Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải.

Theo bất đẳng thức quen thuộc thì $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 - \frac{1}{z} = \frac{2z-1}{z}$. (1đ)

Suy ra $x + y \geq \frac{4z}{2z-1}$ với $z > \frac{1}{2}$. (0,5đ)

Do đó, ta cần chứng minh $\frac{4z}{2z-1} + 2z^2 \geq 6 \Leftrightarrow (z-1)^2(2z+3) \geq 0$, đúng. (1đ)

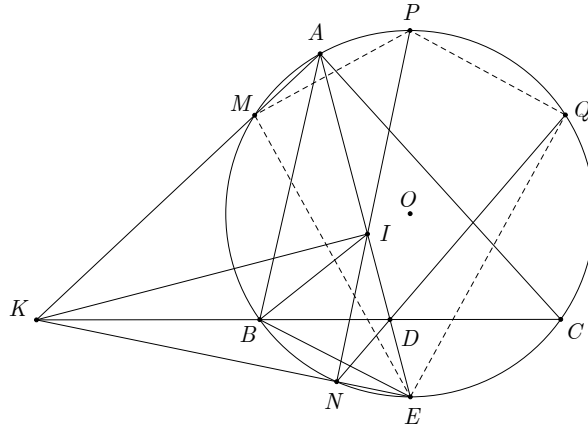
Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 2, z = 1$. (0,5đ)

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi D, E lần lượt là giao điểm của tia AI với $BC, (O)$. Đường thẳng qua I , vuông góc với AI cắt BC ở K và KA, KE cắt lại (O) ở M, N . Các tia ND, NI cắt lại đường tròn (O) tại Q, P .

- Chứng minh rằng tam giác INE vuông.
- Chứng minh rằng $PM = PQ$.

Giải



a) Bằng biến đổi góc, ta có $EI = EB = EC$ nên E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC . (1đ)

Suy ra KI là tiếp tuyến của (BIC) . Do đó $KI^2 = KB \cdot KC = KE \cdot KN$. (1đ)

Mà tam giác KIE vuông tại I nên $IN \perp NE$. (0,5đ)

b) Theo câu trên thì PE là đường kính của (O) .

Ta có $\triangle BDE \sim \triangle ABE$ nên $\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{BE} \Rightarrow EA \cdot ED = EB^2 = EI^2 = EN \cdot EK$ nên tứ

giác $ADNK$ nội tiếp. (1đ)

Suy ra $\angle MAE = \angle DNE$ nên các góc này chắn các cung EM, EQ bằng nhau. (0,25đ)

$\Rightarrow PM = PQ$. (0,25đ)

Bài 5. (2 điểm)

Trong một câu lạc bộ có 100 học sinh, gồm 90 học sinh chơi cầu lông, 80 học sinh chơi bóng bàn và 70 học sinh chơi đá bóng. Hỏi có ít nhất bao nhiêu học sinh chơi cả ba môn thể thao?

Giải.

Theo đề bài, ta có:

- 10 học sinh không chơi cầu lông, gọi là nhóm 1. (0,25đ)
- 20 học sinh không chơi bóng bàn, gọi là nhóm 2. (0,25đ)
- 30 học sinh không chơi đá bóng, gọi là nhóm 3. (0,25đ)

Một học sinh X trong lớp giỏi cả ba môn sẽ không thuộc vào bất cứ nhóm nào trong các nhóm trên (vì các nhóm trên gồm học sinh KHÔNG giỏi một môn nào đó trong ba môn). Vì thế, để có càng ít học sinh X càng tốt (do cần tìm số học sinh giỏi ba môn ít nhất có thể) thì tổng số học sinh trong các nhóm 1, 2, 3 phải càng nhiều càng tốt. Khi đó, ta xét các nhóm 1, 2, 3 rời nhau hết thì tổng số học sinh trong đó là $10 + 20 + 30 = 60$. (1đ)
Suy ra có ít nhất $100 - 60 = 40$ học sinh giỏi cả ba môn. (0,25đ)

Bài 6. (3 điểm)

Ở một công ty, có 10 xe đưa rước nhân viên xuất phát từ cùng một bến để đi đến công ty. Mỗi tài xế có hai lựa chọn là:

- (1) Đi quốc lộ, không ngại kẹt xe nhưng phải đi vòng, thời gian tốn là 40 phút.
- (2) Đi nội thành, đường ngắn hơn và chỉ mất 15 phút nếu một xe chạy, nhưng do đường nhỏ nên nếu có thêm một xe nữa cùng chạy (chỉ xét xe của công ty này) thì thời gian di chuyển của các xe sẽ cùng tăng 5 phút; cứ như thế, thời gian tăng sẽ tỉ lệ thuận với số xe tăng thêm.

Hỏi các tài xế phải thảo luận và chọn ra bao nhiêu xe đi trong nội thành để tổng thời gian các xe di chuyển là ít nhất?

Giải.

Giả sử có x xe đi trên nội thành thì có $10 - x$ xe đi trên quốc lộ. (0,25đ)

Tổng thời gian của các xe đi trên quốc lộ là $40(10 - x)$. (0,25đ)

Thời gian di chuyển của mỗi xe trong nội thành là $15 + 5(x - 1) = 5x + 10$. (0,5đ)

Tổng thời gian của các xe đi trong nội thành là $x(5x + 10)$. (0,5đ)

Do đó, tổng thời gian đi của các xe là

$$40(10 - x) + x(5x + 10) = 5(x^2 - 6x + 80) = 5(x - 3)^2 + 355 \geq 355. \quad (1đ)$$

Vậy thời gian tối thiểu là 355 phút, đạt được khi $x = 3$. (0,5đ)